Algorithmen und Datenstrukturen
(Th. Ottmann und P. Widmayer)

Folien: Hashverfahren

Autor: Sven Schuierer

Institut für Informatik
Georges-Köhler-Allee
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Hashverfahren

Wörterbuchproblem:

Suchen, Einfügen, Entfernen von Datensätzen (Schlüsseln)

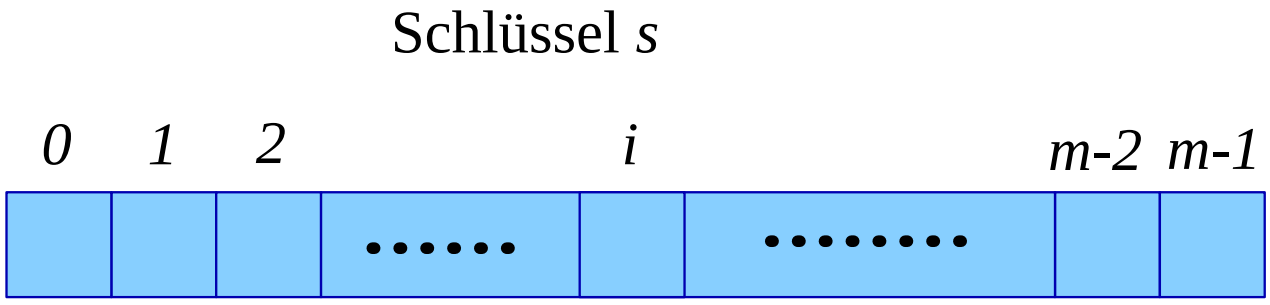
Ort des Datensatzes d: Berechnung aus dem Schlüssel s von d

$\Rightarrow$ keine Vergleiche

$\Rightarrow$ konstante Zeit

Datenstruktur: lineares Feld (Array) der Größe m

Hashtabelle



Hashverfahren—Beispiele

Beispiele:

- Compiler

`i`	int	0x87C50FA4
`j`	int	0x87C50FA8
`x`	double	0x87C50FAC
`name`	String	0x87C50FB2
⋮		

- Umgebungsvariablen (Schlüssel,Attribut) Liste

  EDITOR=emacs
  GROUP=mitarbeiter
  HOST=vulcano
  HOSTTYPE=sun4
  LPDEST=hp5
  MACHTYPE=sparc
  ⋮

- ausführbare Programme

  PATH= /bin:/usr/local/gnu/bin:
  /usr/local/bin:/usr/bin:/bin: . . .

Hashverfahren—Probleme

1. **Größe der Hashtabelle**
   Nur eine kleine Teilmenge S aller möglichen Schlüssel (des Universums) $\mathcal{U}$ kommen vor

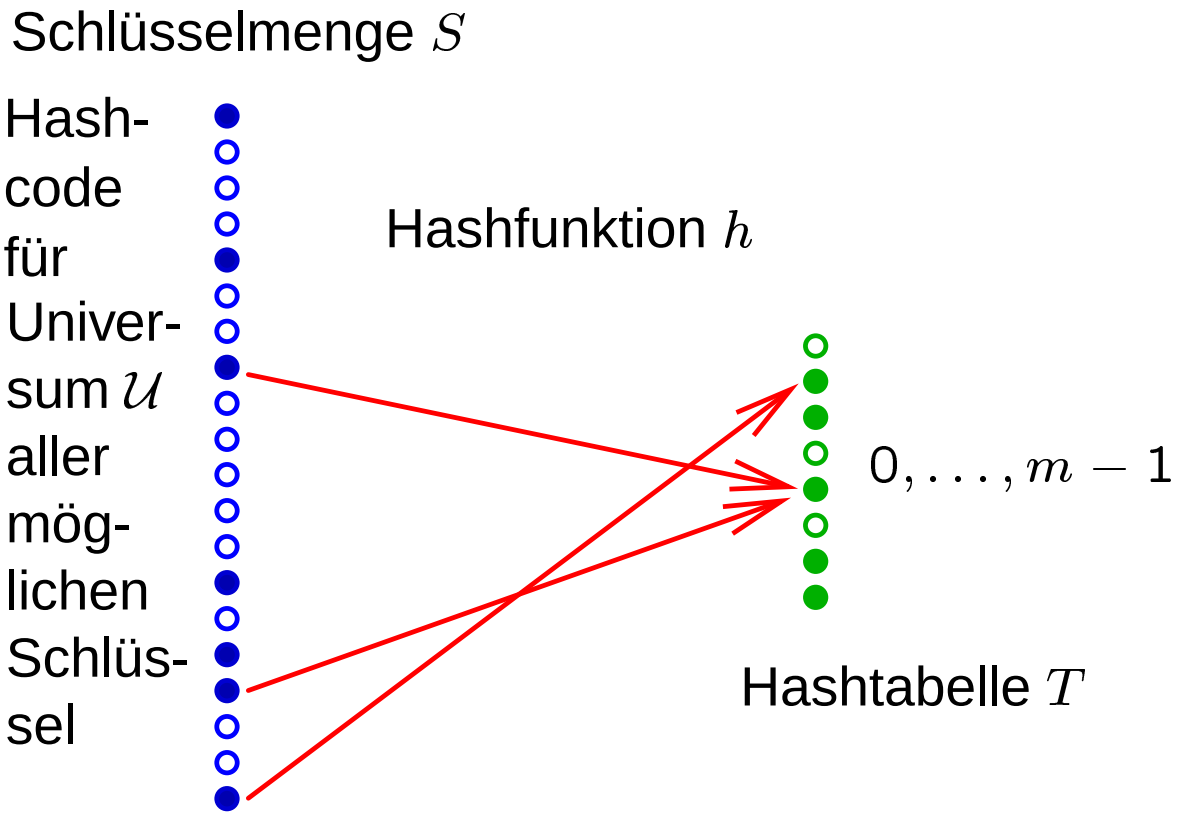
2. **Berechnung der Adresse eines Datensatzes**
   - Schlüssel sind keine ganzen Zahlen
   - Index hängt von der Größe der Hashtabelle ab

In Java:

```
public class Object {
    ⋮
  public int hashCode() { ... }
    ⋮
}
```

Das Universum $\mathcal{U}$ sollte möglichst gleichmäßig auf die Zahlen $-2^{31}, \ldots, 2^{31} - 1$ verteilt werden

Hashfunktion



$$(H(\mathcal{U}) \subseteq [-2^{31}, 2^{31}-1] \subseteq \{1, \ldots, 0\})$$

$h(s)$ = Hashadresse

$h(s) = h(s') \iff s$ und s sind Synonyme bzgl. h

Adreßkollision

Hashverfahren

Beispiel für $\mathcal{U}$: alle Namen in Java mit Länge ≤ 40
$\Rightarrow |\mathcal{U}| = 62^{40}$

Falls $|\mathcal{U}| > m$: Adreßkollisionen unvermeidlich

Hashverfahren:

1. Wahl einer möglichst “guten” Hash-Funktion
2. Strategie zur Auflösung von Adreßkollisionen

Belegungsfaktor α

$$\alpha = \frac{\text{\# gespeicherte Schlüssel}}{\text{Größe der Hash-Tabelle}} = \frac{|S|}{m} = \frac{n}{m}$$

Annahme: Tabellengröße m ist fest

Implementation in Java

```
class TableEntry {
  private Object key;
  private Object value;
}

abstract
class HashTable {
  private TableEntry[] tableEntry;
  private int capacity;

  /* Konstruktor */
  HashTable (int capacity) {
     this.capacity = capacity;
     tableEntry = new TableEntry [capacity];
     for (int i = 0; i <= capacity-1; i++)
     tableEntry[i] = null;
  }

  /* die Hashfunktion */
  protected abstract int h (Object key);

  /* fuege Element mit Schlüssel key und Wert
     value ein (falls nicht vorhanden) */
  public abstract void insert (Object key, Object
    value);

  /* entferne Element mit Schlüssel key (falls
     vorhanden) */
  public abstract void delete (Object key);

  /* suche Element mit Schlüssel key */
  public abstract Object search (Object key);

} // class hashTable
```

Wahl der Hash-Funktion

- leichte und schnelle Berechenbarkeit
- gleichmäßige Verteilung der Daten
  (Beispiel: Compiler)

1. Divisions-Rest-Methode

$$h(k) = k \bmod m$$

Wahl von m?

Beispiele:

a) m gerade, letztes Bit drückt Sachverhalt aus (z.B. 0 = weiblich, 1 = männlich)

$\Rightarrow h(k)$ gerade $\Leftrightarrow k$ gerade

b) $m = 2^p$
$\Rightarrow h(k)$ liefert p niedrigsten Dualziffern von k

Regel: Wähle m prim mit $m \neq r^i \pm j$, $0 \leq j \leq r - 1$,
$r =$ Radix der Darstellung

Multiplikative Methode

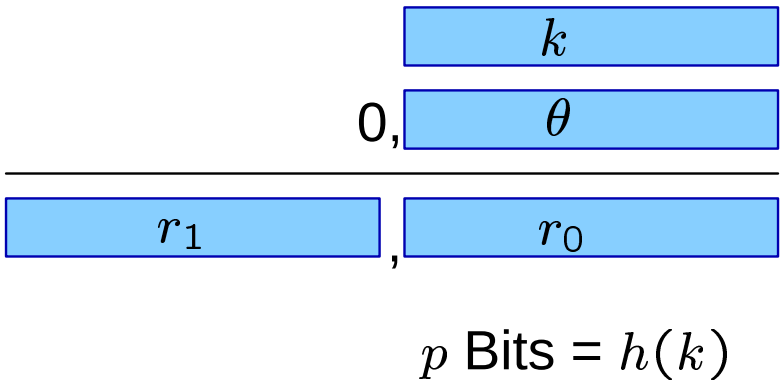
Wähle Konstante θ, $0 < \theta < 1$

1. Berechne $k\theta \bmod 1 = k\theta - \lfloor k\theta \rfloor$

2. $h(k) = \lfloor m(k\theta \bmod 1) \rfloor$

Wahl von m unkritisch, wähle $m = 2^p$:

Berechnung von $h(k)$:



Beispiel:

$$\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339$$

$$k = 123456$$

$$m = 10000$$

$$\begin{aligned} h(k) &= \lfloor 10000(123456 \cdot 0.61803\ldots \bmod 1) \rfloor \\ &= \lfloor 10000(76300,0041151\ldots \bmod 1) \rfloor \\ &= \lfloor 41.151\ldots \rfloor = 41 \end{aligned}$$

3. Universelles Hashing

Problem: h fest gewählt $\Rightarrow$ es gibt $S \subseteq \mathcal{U}$ mit vielen Kollisionen

Idee des universellen Hashing:
Wähle Hashfunktion h zufällig

$\mathcal{H}$ endliche Menge von Hashfunktionen

$$h \in \mathcal{H} : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, \ldots, m-1\}$$

Definition: $\mathcal{H}$ heißt universell, wenn für beliebige $x, y \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\frac{|\{h \in \mathcal{H} \mid h(x) = h(y)\}|}{|H|} \leq \frac{1}{m}$$

Folgerung: $x, y \in \mathcal{U}$ beliebig, $\mathcal{H}$ universell, $h \in \mathcal{H}$ zufällig

$$Pr_{\mathcal{H}}\left(h(x) = h(y)\right) \leq \frac{1}{m}$$

Universelles Hashing—Beispiel

Hashtabelle T der Größe 3, $|\mathcal{U}| = 5$

Betrachte die 20 Funktionen (Menge $\mathcal{H}$):

$x+0$	$2x+0$	$3x+0$	$4x+0$
$x+1$	$2x+1$	$3x+1$	$4x+1$
$x+2$	$2x+2$	$3x+2$	$4x+2$
$x+3$	$2x+3$	$3x+3$	$4x+3$
$x+4$	$2x+4$	$3x+4$	$4x+4$
$\pmod 5$	$\pmod 3$		

und die Schlüssel 1 und 4

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(1\cdot 1+0) \bmod 5 \bmod 3 &= 1 &&= (1\cdot 4+0) \bmod 5 \bmod 3\\
(1\cdot 1+4) \bmod 5 \bmod 3 &= 0 &&= (1\cdot 4+4) \bmod 5 \bmod 3\\
(4\cdot 1+0) \bmod 5 \bmod 3 &= 1 &&= (4\cdot 4+0) \bmod 5 \bmod 3\\
(4\cdot 1+4) \bmod 5 \bmod 3 &= 0 &&= (4\cdot 4+4) \bmod 5 \bmod 3
\end{aligned}
$$

Universelles Hashing

Definition

$$\delta(x, y, h) = \begin{cases} 1 & \text{falls } h(x) = h(y) \text{ und } x \neq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erweiterung von δ auf Mengen $S \subseteq \mathcal{U}$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \delta(x, S, h) &= \sum_{s \in S} \delta(x, s, h) \\ \delta(x, y, \mathcal{G}) &= \sum_{h \in \mathcal{G}} \delta(x, y, h) \end{aligned}$$

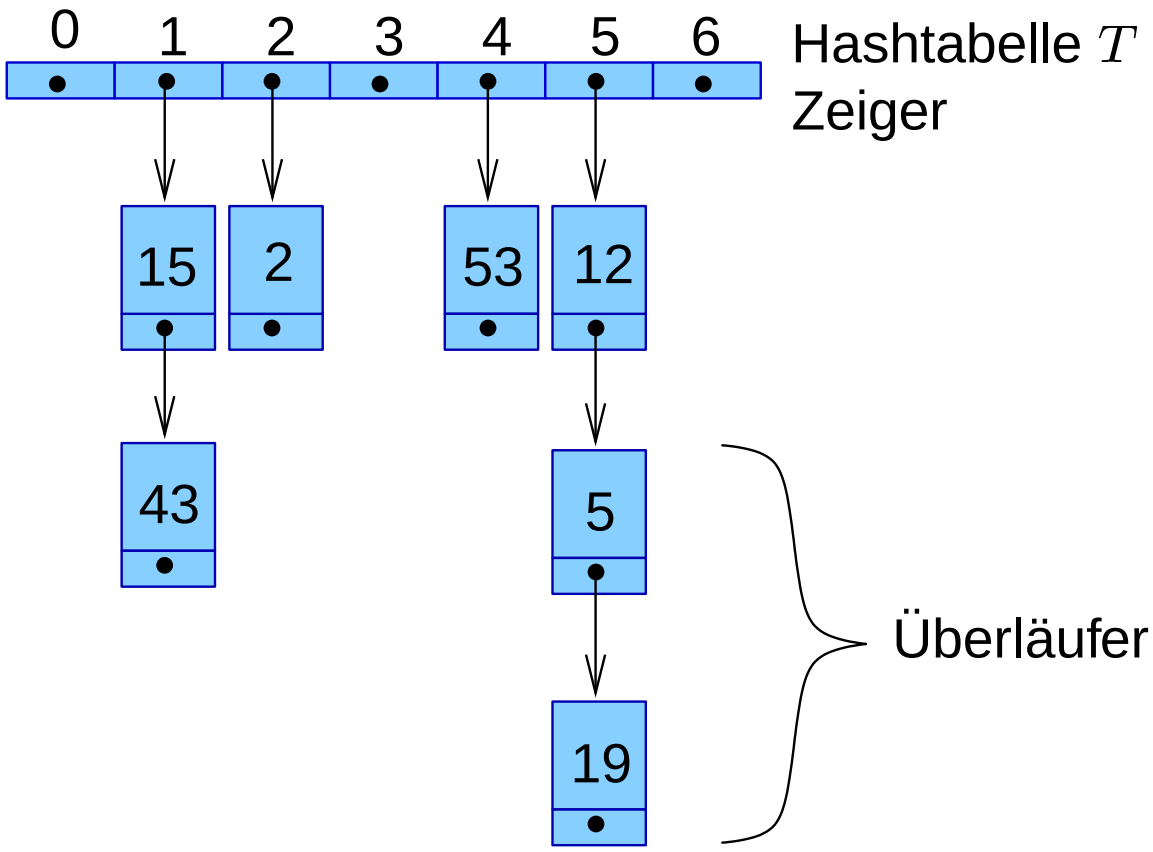
Folgerung: $\mathcal{H}$ ist universell, wenn für alle $x, y \in \mathcal{U}$

$$\delta(x, y, \mathcal{H}) \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m}$$

Hashing mit Verkettung der Überläufer

Schlüssel werden in Überlauflisten gespeichert

$$h(k) = k \bmod 7$$



Verkettung der Überläufer

Suchen nach Schlüssel k

- Berechne $h(k)$ und Überlaufliste $T[h(k)]$
- Suche nach k in der Überlaufliste

Einfügen eines Schlüssels k

- Suchen nach k (erfolglos)
- Einfügen in die Überlaufliste

Entfernen eines Schlüssels k

- Suchen nach k (erfolgreich)
- Entfernen aus Überlaufliste

$\Rightarrow$ Reine Listenoperationen

Implementation in Java

```
class ChainedTableEntry extends TableEntry {
  private ChainedTableEntry next;
}

class ChainedHashTable extends HashTable {
  /* die Hashfunktion */
  public int h (Object key) {
    return key.hashCode () % capacity ;
  }

  /* suche key in der Hashtabelle */
  public Object search (Object key) {
    ChainedTableEntry p;
    p = (ChainedTableEntry) tableEntry [h(key)];

    /* Gehe die Liste durch bis Ende erreicht oder
       key gefunden */
    while (p != null && ! p.key.equals(key)) {
      p = p.next;
    }

    /* Gebe Ergebnis zurück */
    if (p != null)
      return p.key;
    else return null;
  }
```

Implementation in Java

```
/* fuege ein Element mit Schlüssle key und Wert
   value ein (falls nicht vorhanden) */
public void insert (Object key, Object value) {

  ChainedTableEntry entry = new
                            ChainedTableEntry(key,
                            value);

  /* Hole den Tabelleneintrag für key */
  int k = h (key);
  ChainedTableEntry p;
  p = (ChainedTableEntry) tableEntry [k];

  if (p == null){
    tableEntry[k] = entry;
    return ;
  }
  /* Suche nach key */
  while (! p.key.equals(key) && p.next != null) {
    p = p.next;
  }

  /* Fuege das Element ein (falls nicht vorhanden)
     */
  if (! p.key.equals(key))
    p.next = entry;
}
```

Implementation in Java

```
/* entferne das Element mit Schluessel key (falls
   vorhanden) */
public void delete (Object key) {
  int k = h (key);
  ChainedTableEntry p;
  p = (ChainedTableEntry) TableEntry [k];
  TableEntry[k] = recDelete(p, key);
}

/* entferne das Element mit Schluessel key
   rekursiv (falls vorhanden) */
public ChainedTableEntry recDelete (ChainedTableEntry
                                    p,
                                    Object key) {
  /* recDelete gibt einen Zeiger auf den Beginn
     der Liste, auf die p zeigt, zurueck, in der
     key entfernt wurde */
  if (p == null)
    return null;
  if (p.key.equals(key))
    return p.getNext();
  /* ansonsten: */
  p.next = recDelete(p.next, key);
  return p;
}

public void printTable () {...}

} // class ChainedHashTable
```

Test-Programm

```
public class ChainedHashingTest {
  public static void main(String args[]){
    int vec[] = { 12, 53, 5, 15, 2, 19, 43 };
    if (args.length != 0) {
      vec = new int [args.length];
      for (int j = 0 ; j < args.length ; j++){
        vec [j] =
        Integer.valueOf(args[j]).intValue();
      }
    }
    Integer[] t = new Integer[vec.length];
    for (int i = 0; i <= vec.length - 1; i++) {
      t[i] = new Integer(vec[i]);
    }
    ChainedHashTable h = new ChainedHashTable(7);
    for (int i = 0; i <= t.length - 1; i++) {
      h.insert(t[i], null);
    }
    h.printTable ();
    h.delete(t[0]); h.delete(t[1]);
    h.delete(t[6]); h.printTable();
  }
}
```

Ausgabe:

```
0: -|                    0: -|
1: 15 -> 43 -|           1: 15 -|
2: 2 -|                  2: 2 -|
3: -|                    3: -|
4: 53 -|                 4: -|
5: 12 -> 5 -> 19 -|      5: 5 -> 19 -|
6: -|                    6: -|
```

Analyse der direkten Verkettung

Uniform-Hashing Annahme:

- alle Hashadressen werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt, d.h.:
  $Pr(h(k_i) = j) = 1/m$

- unabhängig von Operation zu Operation

Mittlere Kettenlänge bei n Einträgen:

$$n/m = \alpha$$

Definition

C'_n = Erwartungswert für die Anzahl betrachteter Einträge bei erfolgloser Suche

C_n = Erwartungswert für die Anzahl betrachteter Einträge bei erfolgreicher Suche

Verkettung der Überläufer

Vorteile:

- $+$ C_n und C'_n niedrig
- $+$ $\alpha > 1$ möglich
- $+$ echte Entfernungen
- $+$ für Sekundärspeicher geeignet

Effizienz der Suche

Anzahl betrachteter Einträge	separate Verkettung		direkte Verkettung	
	erfolgr.	erfolglos	erfolgr.	erfolglos
$\alpha = 0.50$	1.250	1.110	1.250	0.50
0.90	1.450	1.307	1.450	0.90
0.95	1.475	1.337	1.475	0.95
1.00	1.500	1.368	1.500	1.00

Nachteile:

- $-$ Zusätzlicher Speicherplatz für Zeiger
- $-$ Überläufer außerhalb der Tabelle