Dualität und Arrangements

1. Dualität zwischen Linien und Punkten

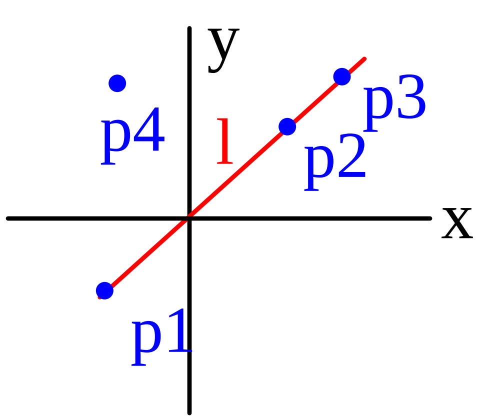
2. Anwendungsbeispiel: Level Bestimmung

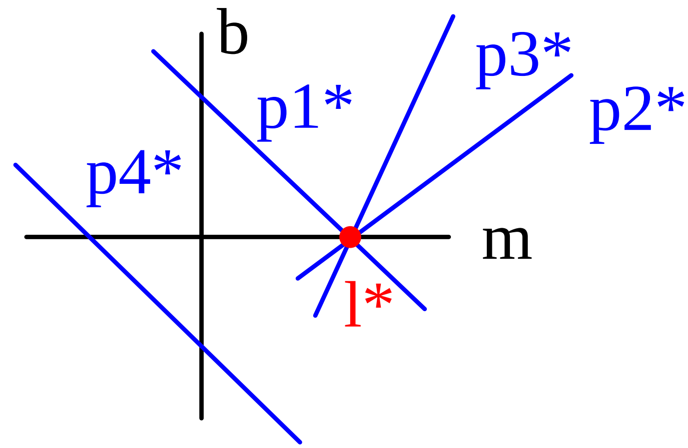
3. Arrangements von Liniensegmenten

4. Halbebenen Diskrepanz

1. Dualität

Jede Gerade y = mx+b durch Paar (m,-b) eindeutig festgelegt



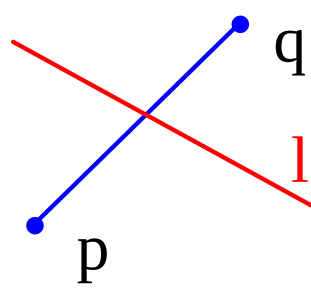


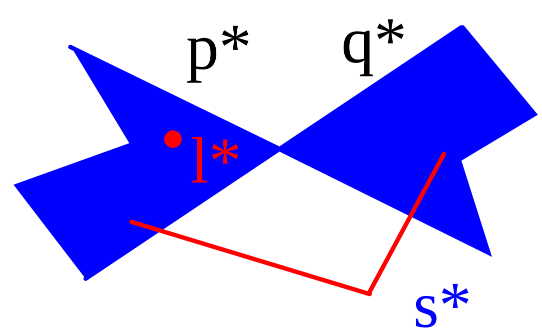
Beobachtungen:

1) Punkt p auf Gerade l <=> Punkt l* auf Gerade p*

2) p oberhalb von l <=> l* oberhalb von p*

Segmente





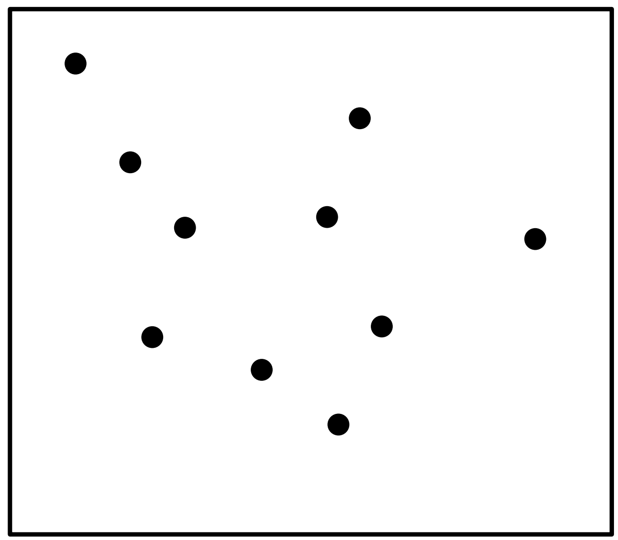
Eigenschaften der Dualitätsabbildung:

(1) $(p^*)^* = p, \quad (l^*)^* = l$

(2) Dualitätsabbildung ist inzidenzerhaltend

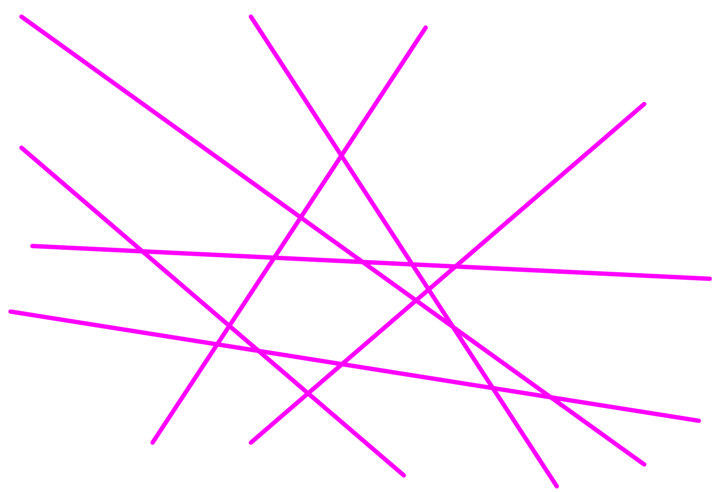
(3) Dualitätsabbildung ist ordnungserhaltend

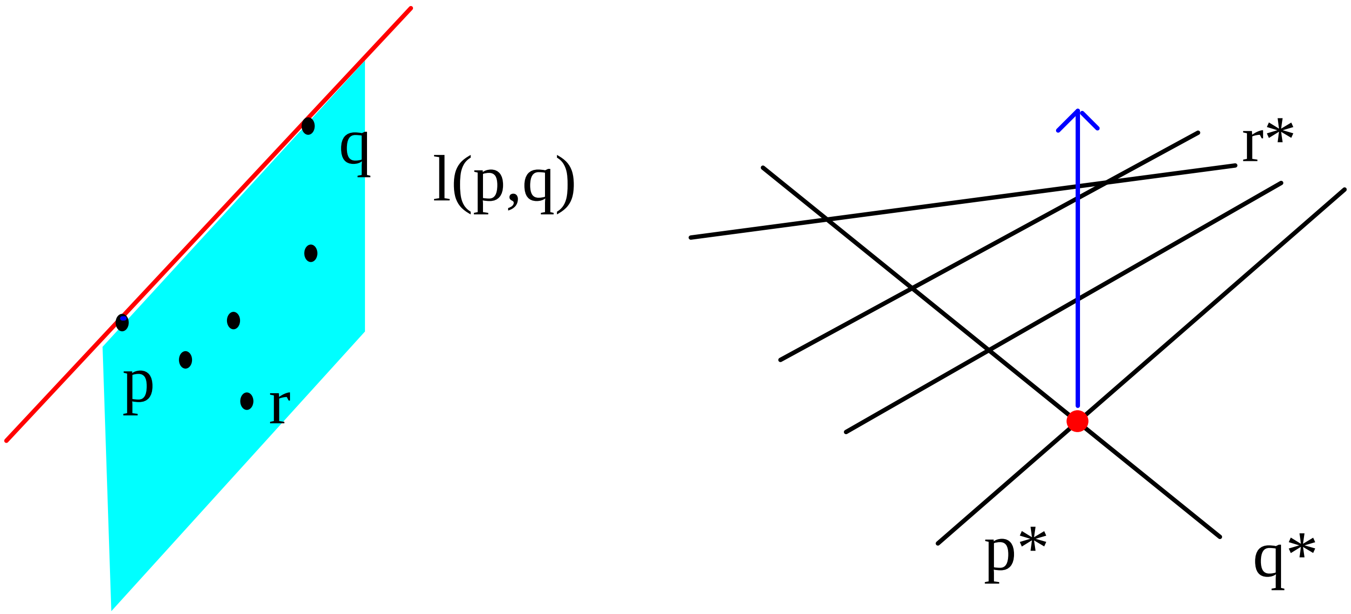
2. Anwendungsbeispiel



Bestimme für jedes Paar p,q
von Punkten und die Gerade l(p,q)
durch p und q:

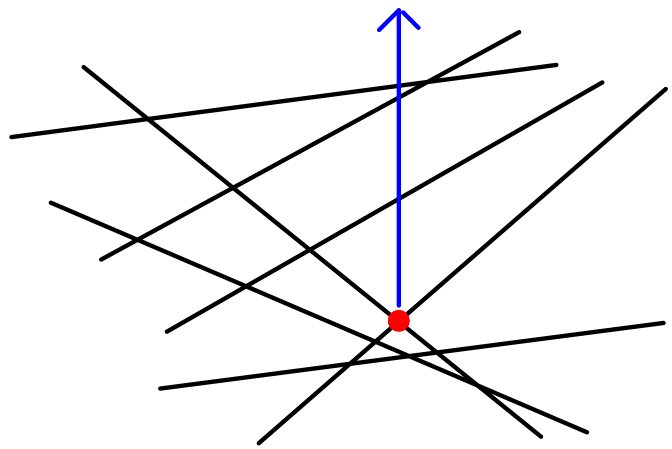
die Anzahl der Punkte
- oberhalb von l(p,q)
- auf l(p,q)
- unterhalb von l(p,q)





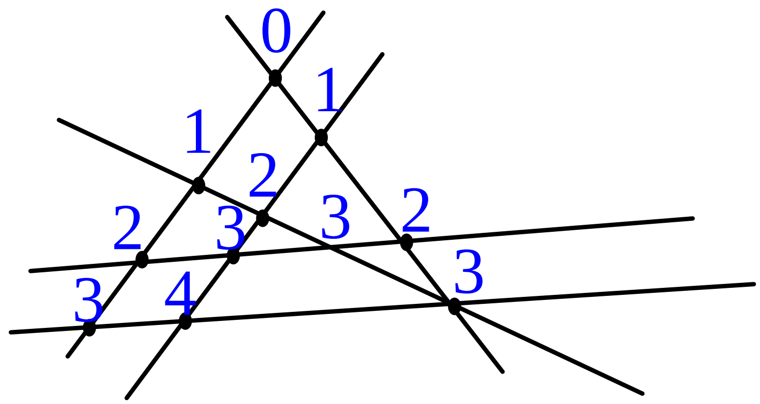
r liegt unterhalb von l <=> l* liegt unterhalb von r*

Aufgabe: Bestimme für eine Menge von Geraden zu jedem Schnittpunkt die Anzahl aller Geraden, die oberhalb des Schnittpunkts verlaufen.

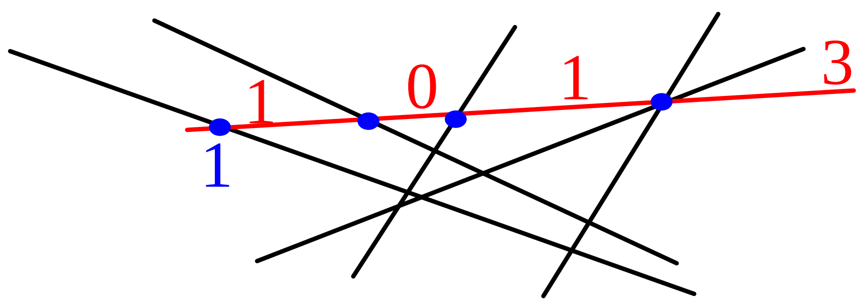


Def.: Level eines Punktes p := # Geraden oberhalb von p

Bestimmung der Levels aller Schnittpunkte

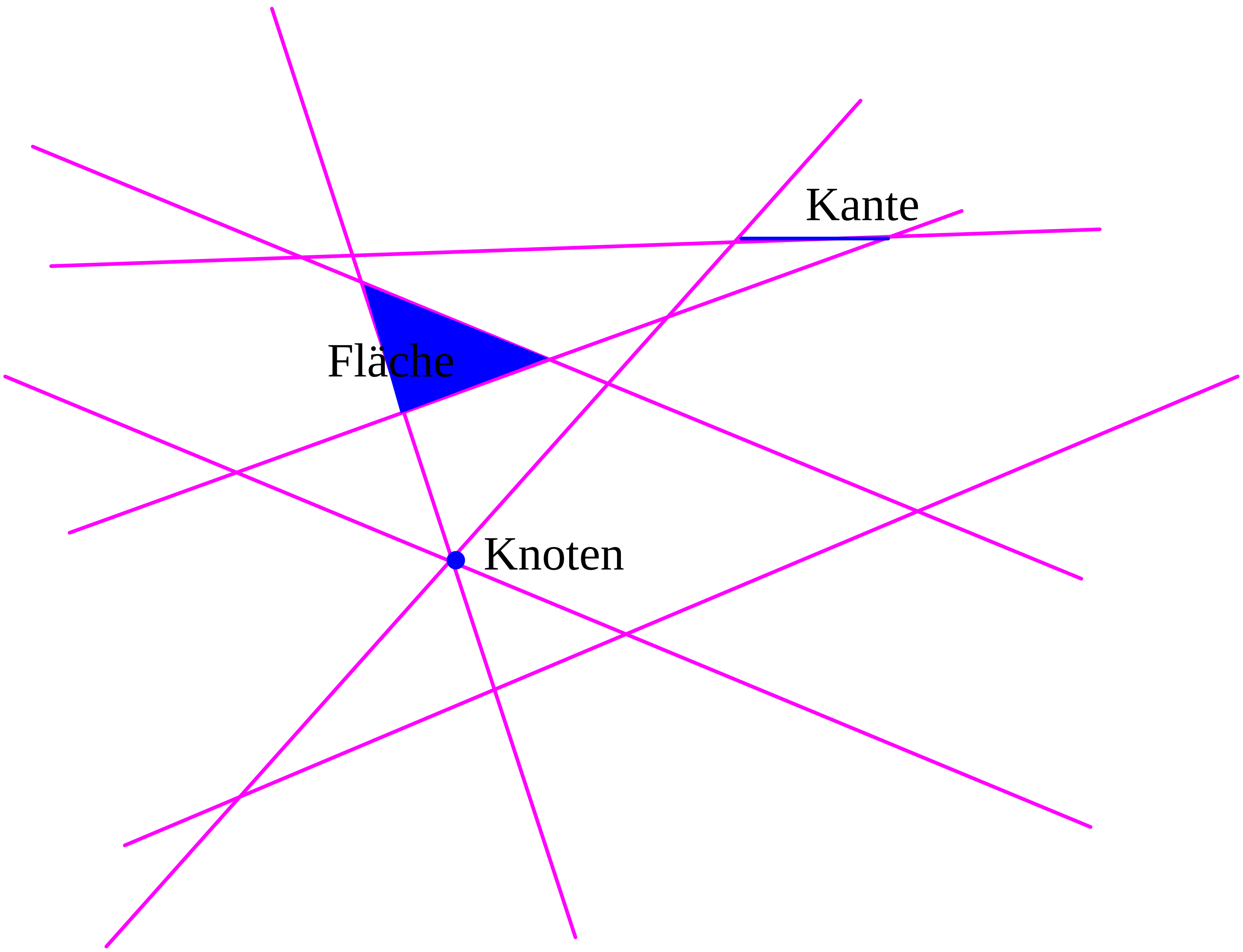


1. Level des linkesten Knotens einer Linie in O(n)
   (Vergleich mit allen)
2. Spaziergang auf Linie: Knoten sind Events



Laufzeit: O(n^2)

3. Arrangement einer Menge von n Geraden



Größe eines Arrangements

Satz: Aufteilung der Ebene A(L) durch Linienmenge L hat

1) <= n(n-1)/2 Knoten
2) <= n^2 Kanten
3) <= n^2/2 + n/2 + 1 Flächen

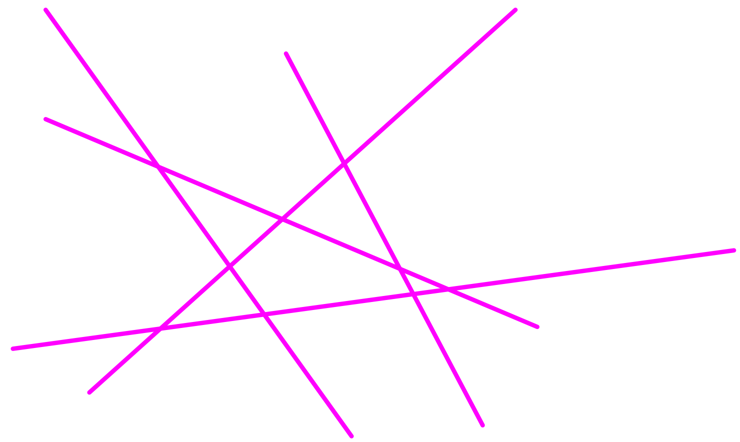
Bew.: O.B.d.A. A(L) einfach, keine Linien parallel und
keine 3 Kanten in einen Punkt

1) jedes Linienpaar ein Knoten => n(n-1)/2 Knoten

2) Kanten längs einer Linie = 1 + # Schnitte mit anderen
= n

=> Gesamtzahl Kanten = n^2

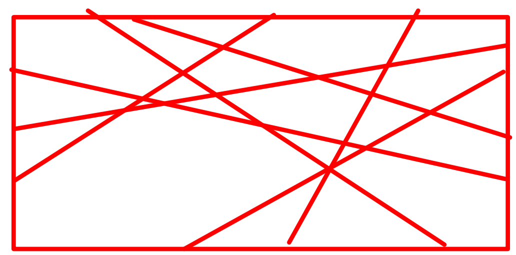
Anzahl Flächen



3) Euler-Formel (mit Unendlichkeitspunkt)

$$f = 2 - (v+1) + e$$
$$= 2 - (n(n-1)/2 + 1) + n^2$$
$$= n^2/2 + n/2 + 1$$

Speicherung eines Arrangements



Bounding box enthält alle Knoten von A(L).

Speichere A(L) als doppelt verkettete Kantenliste!

Berechnung des Arragements

Plane-Sweep für Segmentschnitt: O(n^2 log n), da max. n^2 Schnitte

Inkrementeller Algorithmus in O(n^2):

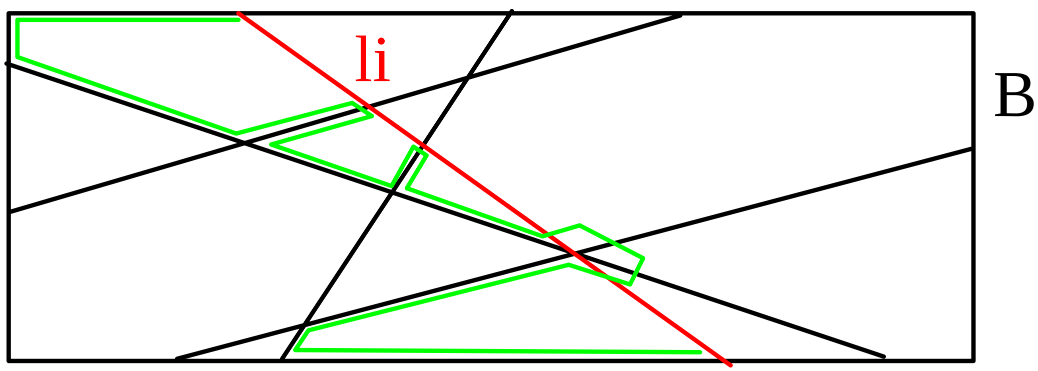
1. Berechne Bounding Box
2. Berechne doppelt-verkettete Kantenliste der Aufteilung

   for i = 1..n

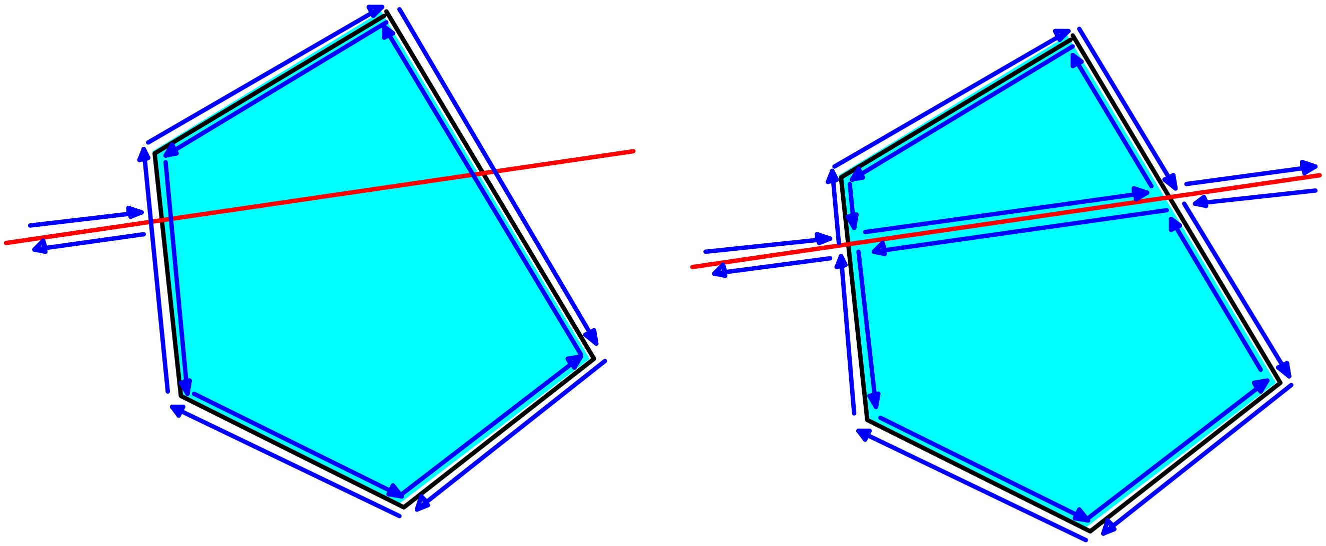
   Finde Schnitt li auf B und zerteilte Fläche f

   Solange f nicht unbeschränkt

   Zerteile f und setzte f auf nächste Schnittfläche



Aufteilung einer Fläche

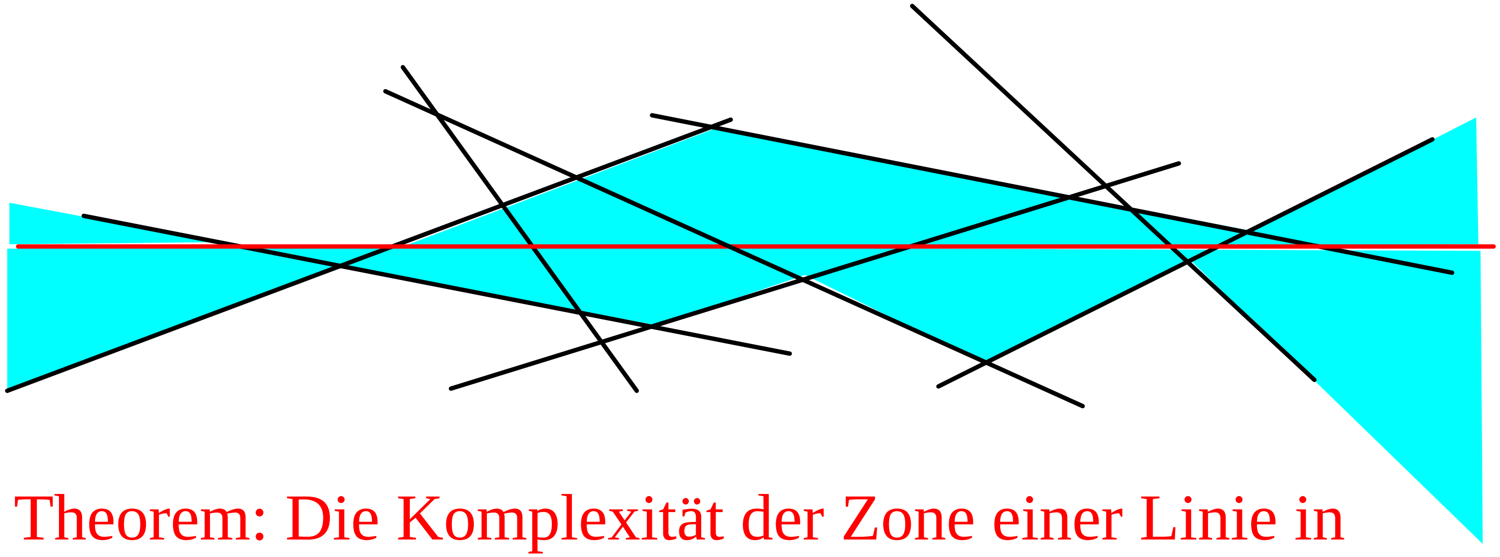


eine neue Fläche,
ein neuer Knoten,
zwei neue (Halb-) Kanten

Zeit: O(1)

Zonentheorem

Komplexität: Summe von Kanten und Knoten

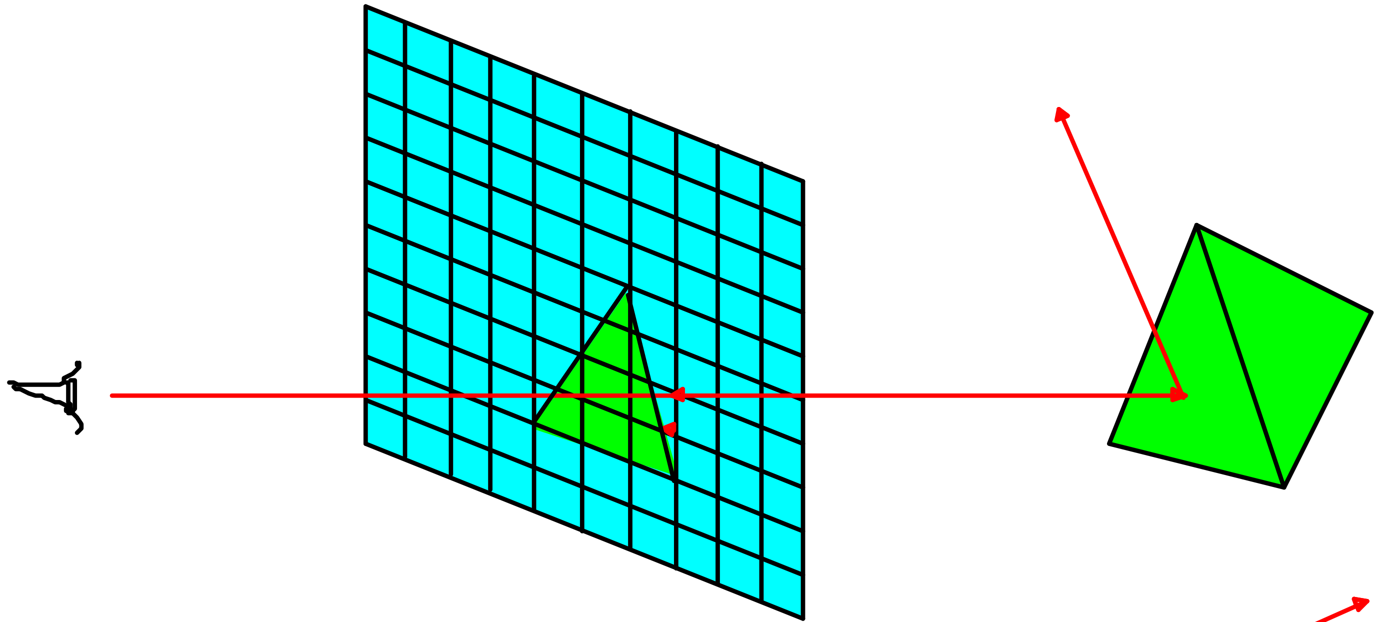


Theorem: Die Komplexität der Zone einer Linie in Arrangement von m Linien ist O(m).

Beweis: Induktion. Beim Hinzufügen einer Linie entstehen nur konstant viele Kanten und Knoten. Fallunterscheidung: Siehe Buch.

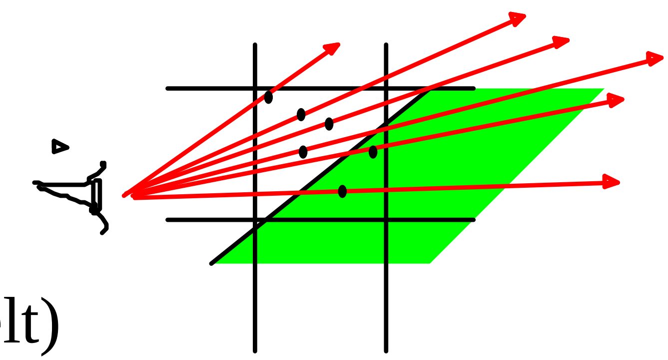
Arrangements und Dualität

Supersampling in Ray Tracing



Um schräge Linien zu verarbeiten: Supersampling

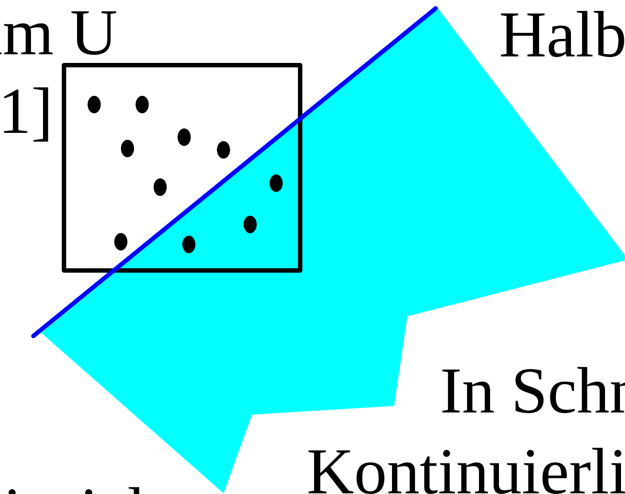
- alle Kästchen
- viele Strahlen (ausgewürfelt)
- mitteln



Berechnung der Diskrepanz

Universum U

[0,1]x[0,1]



Halbebene h

H = Menge aller h

In Schnitt von U und h

Menge S
von n Beispielen
bzw. Punkten

Kontinuierliches Maß A(h): Fläche
Diskretes Maß A(S,h): Anzahl Punkte
(jeweils anteilig)

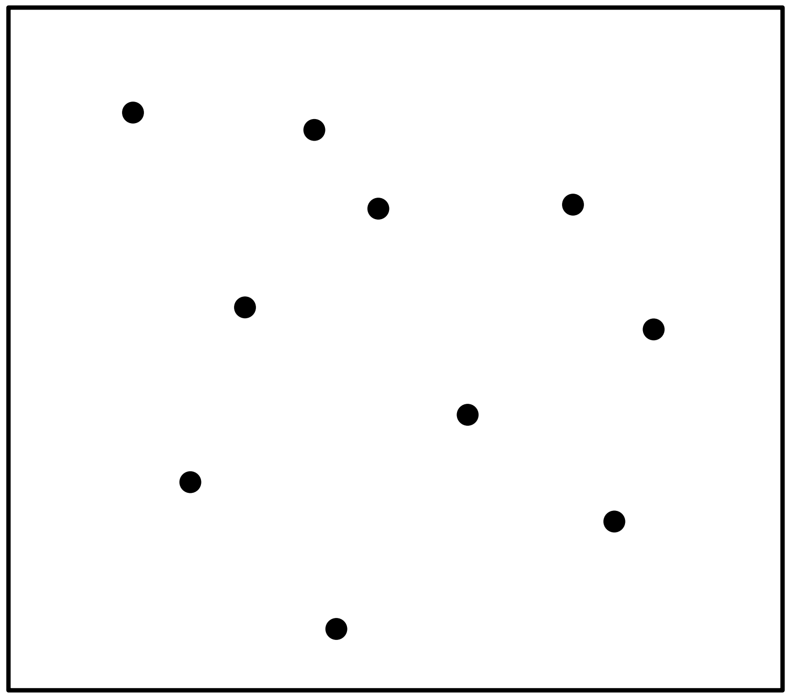
Diskrepanz von h zu S: D(S,h)=|A(h)-A(S,h)|

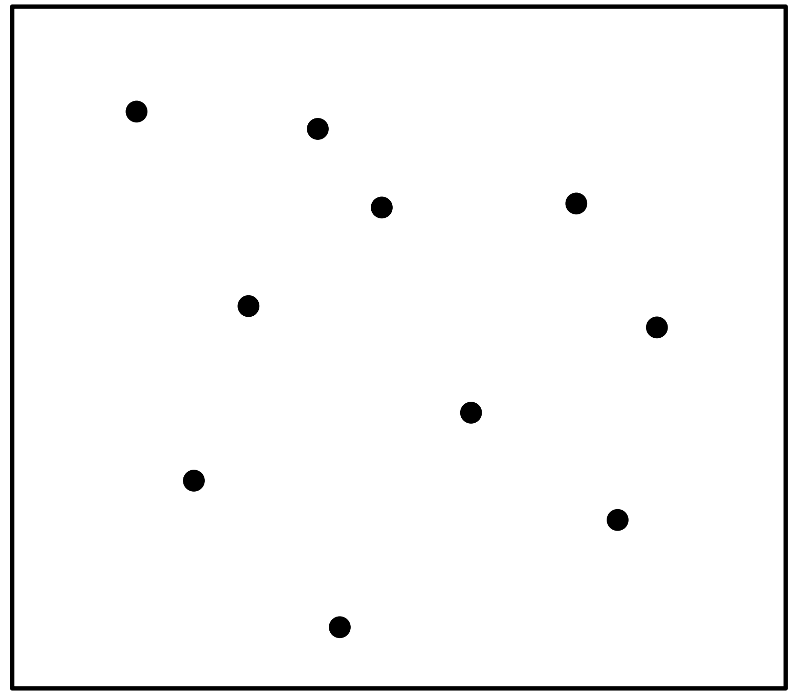
im Beispiel: |0.25-0.3| = 0.05

Halbebenendiskrepanz: sup{D(S,h)| h in H}

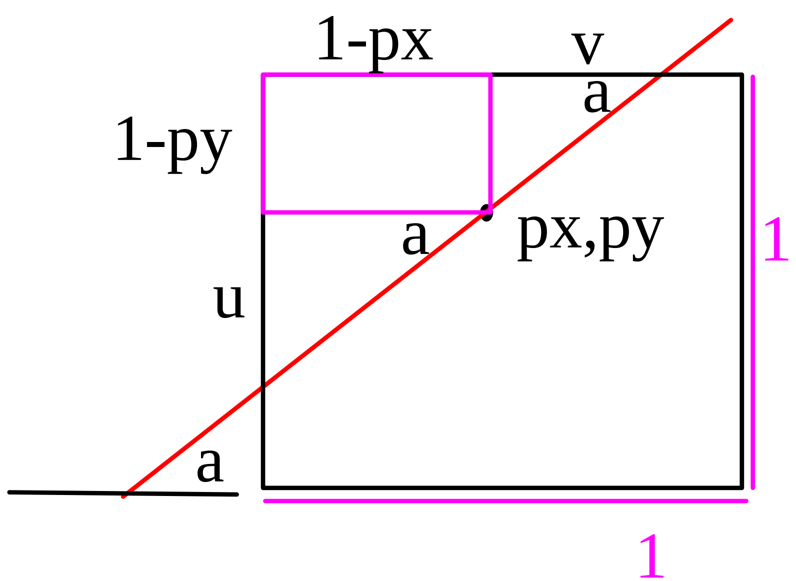
2 Fälle bei max. Diskrepanz: h enthält einen Punkt h in S
h enthält zwei Punkte h in S

Erster Fall kann in O(n^2) behandelt werden.





Erster Fall: Ein Punkt



Es ist:

A(a) = 1/2 (1-py+px tan a) (px + (1-py) / tan a)

Mit tan' = 1/cos^2, (1/x)'=-1/x^2, Kettenregel =>

A'(a) = 1/2 (px^2 /cos^2 a + (1-py)^2/cos^2 a tan^2 a)

A'(a) = 0 => px^2 - (1-py)^2 / tan^2 a

=> tan^2 a = (1-py)^2 / px^2