# Algorithmen und Datenstrukturen

# (Th. Ottmann und P. Widmayer)

## Folien: Matroide

**Autor: Sven Schuierer**

Institut für Informatik
Georges-Köhler-Allee
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

# 1 Matroide

Ein Mengensystem $\mathcal{I}$ über einer endlichen Menge $M$ heißt Unabhängigkeitssystem falls

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $A \subseteq B \subseteq M$, $B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \in \mathcal{I}$.

Ein Unabhängigkeitssystem $(M, \mathcal{I})$ ist ein Matroid, wenn gilt:

**Austauscheigenschaft:**
Ist $A, B \in \mathcal{I}$ mit $|A| < |B|$, dann gibt es ein $x \in B \setminus A$, so daß $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

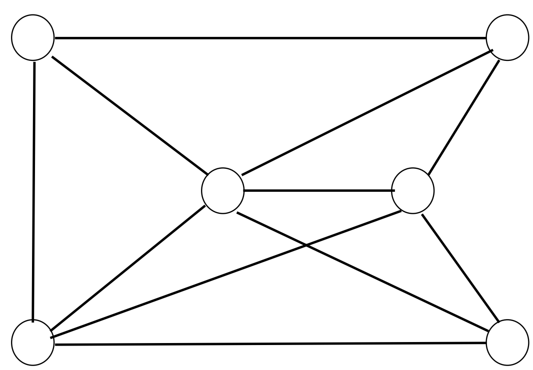
Austauscheigenschaft: Durch $|B \setminus A|$-fache Anwendung der Matroid-Eigenschaft kann man $|A|$ Elemente von $B$ durch die Element von $A$ ersetzen.

# 2 Beispiel

$M_G$ = Menge $E$ der Kanten von $G$

$\mathcal{I}_G$ ist wie folgt definiert:

$A \in \mathcal{I}_G$ gdw. $A \subseteq M_G$ und $G_A = (V, A)$ ist azylisch (A induziert einen Wald).



Satz: $(M_G, \mathcal{I}_G)$ ist ein Matroid.

# 3 Maximale Teilmengen

$x \in M$ ist eine Erweiterung von $A \in \mathcal{I}$ gdw. $A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$

Gibt es kein Erweiterung von $A$, so heißt $A$ maximal in $\mathcal{I}$.

Satz: Alle maximalen Teilmengen in $\mathcal{I}$ haben die gleiche Größe.

Beispiel:
$G$ ungerichteter, zusammenhängender Graph
$\Rightarrow$ maximale Teilmengen von $(M_G, \mathcal{I}_G)$ induzieren spannende Bäume

# 4 Gewichtete Matroide

Gewichtsfunktion: $w : M \longrightarrow \mathbb{R}$

Gesucht: $A \in \mathcal{I}$, $A$ maximal, das

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$$

maximiert.

# 5 Greedy Algorithmus

Greedy-Matroid

Input: Ein Matroid $(M, \mathcal{I})$ mit Gewichtsfunktion $w$

Output: Ein maximales $A \in \mathcal{I}$, das $w(A)$ maximiert

```
sortiere die Elemente in M nach absteigendem
    Gewicht:
    w(x_1) ≥ ··· ≥ w(x_n)
A_0 = ∅
for i = 1 to n do
    if A_{i-1} ∪ {x_i} ∈ I
        then A_i = A_{i-1} ∪ {x_i}
        else A_i = A_{i-1}
return A_n
```

# 6 Korrektheit

Satz: Sei $(M, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Gewichtsfunktion $w$. Dann liefert der Algorithmus Greedy-Matroid ein maximales $A \in \mathcal{I}$, das $w(A)$ maximiert.

Beweis: Sei $(M, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Gewichtsfunktion $w$. Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $w(x_i) \geq w(x_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Ferner sei

$$A_n = \left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right\}$$

die von Greedy-Matroid berechnete Lösung mit $w(x_{i_l}) \geq w(x_{i_{l+1}})$, $l = 1, \ldots, k-1$.

Offensichtlich ist $A_i \in \mathcal{I}$ eine Invariante der for-Schleife. Wir zeigen zunächst durch Widerspruch, daß $A_n$ maximal ist. Denn angenommen es gibt ein $B \in \mathcal{I}$ mit $|B| > |A|$. Dann gibt es nach der Austauscheigenschaft ein $x_j \in B$ mit $x_j \notin A_n$ und $A_n \cup x_j \in \mathcal{I}$. Da $x_j$ von Greedy-Matroid verworfen wurde, gilt $A_{j-1} \cup \left\{x_j\right\} \notin \mathcal{I}$ im Widerspruch zu

$$A_{j-1} \cup \left\{x_j\right\} \subseteq A_n \cup \left\{x_j\right\} \in \mathcal{I}$$

und der Tatsache, daß $\mathcal{I}$ ein Unabhängigkeitssystem ist.

Als zweites zeigen wir, daß $A_n$ maximales Gewicht unter den maximalen Elementen von $\mathcal{I}$ hat. Angenommen es gibt ein maximales $B \in \mathcal{I}$ mit $w(B) > w(A_n)$. Sei

$$B = \left\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\right\}.$$

mit $w(x_{j_l}) \geq w(x_{j_{l+1}})$. (Da $A_n$ und $B$ maximal sind, hat $B$ die gleiche Anzahl von Elementen wie $A_n$.)

Da $w(B) > w(A_n)$, gibt es einen Index $l$ mit $w(x_{j_l}) > w(x_{i_l})$. Sei $l$ der kleinste solche Index.

Wegen $w(x_{j_l}) > w(x_{i_l})$ und der absteigenden Sortierung der $x_i$ gilt, $j_l < i_l$. Wir wenden nun die Austauscheigenschaft auf die Mengen

$S = A_{i_{l-1}} = A_{i_l - 1} = \left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l-1}}\right\}$ und $T = \left\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}\right\}$ an. Da $|S| < |T|$, gibt es ein $x_{j_m} \in T \setminus S$ mit $S \cup \left\{x_{j_m}\right\} \in \mathcal{I}$. Wegen $x_{j_m} \in \left\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}\right\}$ und der absteigenden Sortierung der $x_i$ gilt:

$$j_m \leq j_l \leq i_l - 1.$$

Greedy-Matroid hat $x_{j_m}$ zum Zeitpunkt $j_m$ verworfen, da $x_{j_m} \notin S = A_{i_l - 1} \supseteq A_{j_l} \supseteq A_{j_m}$. Da $A_{j_m - 1} \cup \left\{x_{j_m}\right\} \subseteq S \cup \left\{x_{j_m}\right\} \in \mathcal{I}$ ist, folgt $A_{j_m - 1} \cup \left\{x_{j_m}\right\} \in \mathcal{I}$ und Greedy-Matroid hätte $x_{j_m}$ zum Zeitpunkt $j_m$ wählen müssen.