Algorithmen und Datenstrukturen

(Th. Ottmann und P. Widmayer)

Folien: Kürzeste Wege

Autor: Sven Schuierer

Institut für Informatik
Georges-Köhler-Allee
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

1 Kürzeste Wege

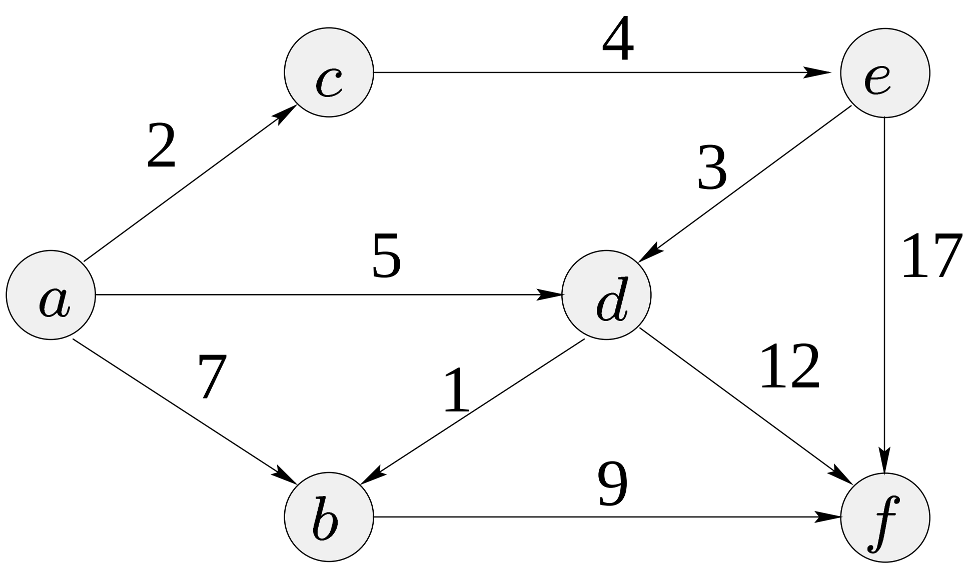
Gegeben:

1. Graph $G = (V, E)$ (zusammenhängend, endlich, gerichtet)
2. Gewichtungsfunktion $\ell : E \longrightarrow I\!R_+$ (Länge einer Kante)
3. Startknoten $s \in V$

Aufgabe:

Berechne den kürzesten Weg von s zu jedem Knoten in $v \in V$

2 Beispiel



Startknoten = a

3 Kürzeste Wege

Prinzip: Knoten in $V \setminus S$ mit min. Distanz zu s zuerst.

Anfangs:

$S = \emptyset$; $V \setminus S = V$

$d(s) = 0$ und $d(v) = \infty$, für alle $v \in V \setminus \{s\}$

Solange $V \setminus S \neq \emptyset$

1. Wähle Knoten in $V \setminus S$ mit minimaler Distanz $d(v)$
2. Nimm v in S auf
3. Für jede Kanten (v, w) von v zu einem Knoten $w \notin S$: adjustiere $d(w)$:

$$d(w) = \min\{d(w), d(v) + \ell(v, w)\}$$

Invariante: $d(w) = \min\{d(v) + \ell(v, w) \mid v \in S\}$

4 Beispiel

$$
\begin{array}{llllll}
\mid (a,0) & (b,\infty) & (c,\infty) & (d,\infty) & (e,\infty) & (f,\infty) \\
(a,0) \mid & (b,\quad) & (c,\quad) & (d,\quad) & (e,\quad) & (f,\quad) \\
(a,0) & (c,2) \mid & (d,\quad) & (e,\quad) & (b,\quad) & (f,\quad) \\
(a,0) & (c,2) & (d,5) \mid & (e,\quad) & (b,\quad) & (f,\quad) \\
(a,0) & (c,2) & (d,5) & (e,6) \mid & (b,\quad) & (f,\quad) \\
(a,0) & (c,2) & (d,5) & (e,6) & (b,6) \mid & (f,\quad) \\
(a,0) & (c,2) & (d,5) & (e,6) & (b,6) & (f,15) \mid
\end{array}
$$

5 Dijkstra's Verfahren

shortest-path

Input: Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion
$\ell : E \longrightarrow I\!R_+$, Startknoten s

Output: die Länge des kürzesten Weges von s nach v,
für alle $v \in V$

```
for all v ∈ V do d(v) = ∞
d(s) = 0; S = ∅
Q = Vorrangswarteschlange für Knoten in V
while Q ≠ ∅ do
    /* Q = V \ S */
    v = Q.delete-min()
    S = S ∪ {v}
    for all (v, w) ∈ E do
        if d(v) + ℓ(v, w) < d(w)
          then Q.decrease-key(w, d(v) + ℓ(v, w))
        entferne (v, w) aus E
end while;
```

6 Bellmann'sches Optimalitätsprinzip

Optimalitätsprinzip

Sei $P = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ ein kürzester Weg von v_0 nach v_k und $0 \leq i \leq k$, dann ist

$$P_i = \langle v_0, v_1, \ldots, v_i \rangle$$

ein kürzester Weg von v_0 nach v_i.