Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Ottmann
Christoph Hermann (Theme 4)

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
ottmann@informatik.uni-freiburg.de
hermann@informatik.uni-freiburg.de

Advanced Topics in Algorithms & Data Structures, SS 2006

Tutorial Sheet 2: (Theme 4) – Due 24 May 2006 (Wednesday), 11am.

Hand-in written solutions at beginning of OR email solutions before class on 24 May 2006.

Theme 4 – Mechanism Design

1 Aufgabe

Problemstellung Entwerfen Sie einen strategiebeständigen Mechanismus für die Berechnung eines minimalen spannenden Baumes.

Agenten sind hier die Kanten des Graphen und die private Information eines Agenten sind die Kosten der entsprechenden Kante.

Lösung Sei G ein Graph. Für jede Kante definiere die Kosten der Kante als den Typ des Agenten (direkter Mechanismus).

Sei MSB_G der minimale spannende Baum von G. (Sollte mehr als ein minimaler spannender Baum existieren, entwerfe eine deterministische Lösung zur Auswahl eines dieser Bäume.) Der Mechanismus berechnet den MSB_G durch die angegebenen Typen der Agenten. Die Zahlung p_{e_i} des Agenten i ist $p_{e_i} = \sum_{e_j \in MSB_{G \setminus e_i}} c_{e_j} - \sum_{\substack{e_j \in MSB_G \\ and\, e_j \neq e_i}} c_{e_j}$ mit c_{e_i}berichteter Typ des Agenten e_i. Die Auszahlung des Agenten i entspricht also der Summe der Kosten eines MSB des Graphen $G \setminus e_i$(G ohne die Kante e_i) abzüglich der Summe der Kosten der Kanten eines MSB im gesamten Graphen. Dieser Mechanismus gehört zur Familie der VCG Mechanismen und ist deshalb strategiebeständig.

2 Aufgabe

2.1 Teilaufgabe a)

Problemstellung Geben Sie zwei Beispiele eines Graphen in dem sich mehrere Agenten bei der Berechnung des kürzesten Pfades besser stellen (Ihre Auszahlung erhöhen) wenn Sie nicht Ihre tatsächliche Kosten angeben.

Lösung Es wird nur ein Beispiel gegeben:

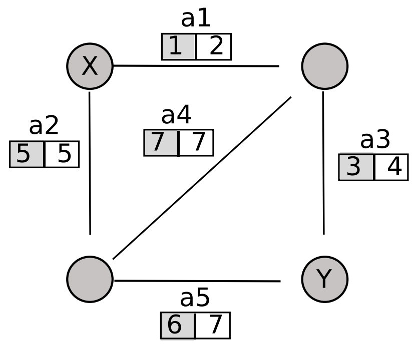

Abbildung 1: Beispielgraph

a_1	a_3			$\sum$
1	3		=	4
a_1	a_4	a_5		$\sum$
1	7	6	=	14
a_2	a_4	a_3		$\sum$
5	7	3	=	15
a_2	a_5			$\sum$
5	6		=	11

Zahlung	Kosten bei Nutzung	Nutzen
$p_1 = 11 - 3 = 8$	1	3
$p_2 = 0$	5	0
$p_3 = 11 - 1 = 10$	3	7
$p_4 = 0$	7	0
$p_5 = 0$	6	0

Tabelle 1: bei wahrheitsgemäßer Berichterstattung (grau hinterlegte Werte)

a_1	a_3			$\sum$
2	4		$=$	***6***
a_1	a_4	a_5		$\sum$
2	7	7	$=$	7
a_2	a_4	a_3		$\sum$
5	7	4	$=$	16
a_2	a_5			$\sum$
5	7		$=$	13

Zahlung	Kosten bei Nutzung	Nutzen
$p_1 = 13 - 4 = 9$	1	***8***
$p_2 = 0$	5	0
$p_3 = 13 - 2 = 11$	3	***8***
$p_4 = 0$	7	0
$p_5 = 0$	6	0

Tabelle 2: bei unwahrheitsgemäßer Berichterstattung (weiß)

Berechnung: Man sieht an diesem Beispiel, dass zwar immer noch der richtige Pfad gewählt wird (Ziel des Mechanismus wird erreicht), jedoch tätigt der Mechanismus viel höhere Ausgaben als notwendig.

2.2 Teilaufgabe b)

Problemstellung Geben Sie ein Beispiel eines Graphen in dem die Auszahlung des Mechanismus an die Agenten die Kosten des kürzesten Pfades um ein vielfaches ($\geq 10 * Kosten$ des Pfades) übersteigen.

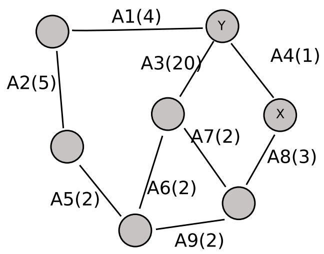

Abbildung 2: Graph

Lösung Der kürzeste Pfad von X nach Y hat Kosten 1 (über A4). Der nächstbeste Weg ist A8,A9,A5,A2,A1 mit Kosten von 16. Also bezahlt man dem Agenten A4 16-0 = 16.

2.3 Teilaufgabe c)

Problemstellung Geben Sie ein Beispiel eines Graphen für das Kürzeste-Wege Problem in dem man einen Agenten nicht zwingen kann seinen wahren Typ zu berichten, egal welchen Mechanismus man verwendet.

Lösung Ein Graph in dem der kürzeste Weg zwingend eine bestimmte Kante passieren muss. Der Agent dieser Kante kann seine Kosten beliebig hoch angeben.

3 Aufgabe

Problemstellung Der Marginal Cost Ansatz für Multicast Cost sharing (wie alle VCG Mechanismen) ist strategiebeständig, aber nicht gruppenstrategiebeständig. Geben Sie eine Familie an Beispielen (Graphen mit einer Abhängigkeit von n) die zeigen, dass der Algorithmus nicht gruppenstrategiebeständig ist.

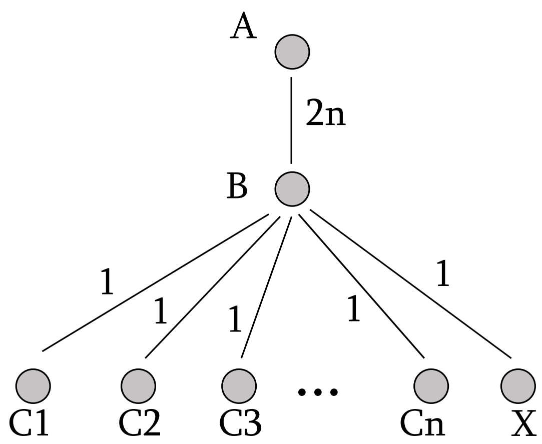

Abbildung 3: Beispiellösung

Lösung Jeder Agent Ci hat einen Nutzen von 2 für den Empfang. Es gibt einen weiteren Agenten X mit Nutzen $4n+1$. Wenn jeder Agent die Wahrheit berichtet, dann zahlt Agent X $n+1$ und jeder andere Agent Ci zahlt 1. (Wenn bei der Berechnung der globale Nutzen negativ ist, gibt es keinen Nutzen, also 0.) Wenn jedoch jeder Agent Ci sagt, dass sein Nutzen 3 ist, dann Zahlt Agent X 1 und die Zahlungen der anderen Agenten Ci verändern sicht nicht. Das bedeutet, dass die Gruppe der Agenten $\{C1, \ldots, Cn, X\}$ eine Gruppe ist, die sich strategisch verhalten kann.

Wahrheitsgemäße Berechnung bei n=2:
$NW(R) = v_R - c(T(R)) = 13 - 7 = 6$

$NW_{-1}(R) = 11 - 6 = 5$
$NW_{-2}(R) = 11 - 6 = 5$
$NW_{-x}(R) = 4 - 6 = -2 \rightarrow 0$
$p_1 = 2 - (6 - 5) = 1$
$p_2 = 2 - (6 - 5) = 1$
$p_x = 9 - (6 - 0) = 3$

Berechnung bei Unwahrheit:
$NW(R) = v_R - c(T(R)) = 15 - 7 = 8$
$NW_{-1}(R) = 12 - 6 = 5$
$NW_{-2}(R) = 12 - 6 = 6$
$NW_{-x}(R) = 6 - 6 = 0$
$p_1 = 3 - (8 - 6) = 1$
$p_2 = 3 - (8 - 6) = 1$
$p_x = 9 - (8 - 0) = 1$

4 Beispiel Marginal Cost aus dem Tutorial

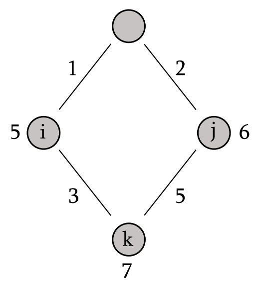

Abbildung 4: Marginal Cost Ansatz

Bei diesem Beispiel des marginal Cost war die im Tutorium vorgeführte Berechnung fehlerhaft. Gerechnet wurde folgendes:

$$W = 5 + 6 + 7 - 1 - 2 - 3 = 12 \tag{1}$$

$$W_{-i} = 6 + 7 - 2 - 5 = 6 \tag{2}$$

$$p_i = 5 - (12 - 6) = -1 \tag{3}$$

In Zeile 2 liegt der Fehler der Berechnung. Hier wird davon ausgegangen, dass wenn i nicht am Empfang teilnimmt, dass alle Kanten die über Ihn laufen entfernt werden.

Dies ist allerdings nicht der Fall. Beim marginal Cost wird immer der kostengünstigste Teilbaum verwendet der zum Erreichen aller Empfänger notwendig ist.

Die richtige Berechnung lautet also:

$$W = 5 + 6 + 7 - 1 - 2 - 3 = 18 - 6 = 12$$

$$W_{-i} = 6 + 7 - 1 - 2 - 3 = 13 - 6 = 7$$

$$p_i = 5 - (12 - 7) = 0$$

$p_j = 6 - (12 - 6) = 0$ und $p_k = 7 - (12 - 8) = 3$ analog.

Was auch sinnvoll ist, da so i nichts zahlen muss (er empfängt ja schliesslich die Übertragung auch nicht).